

Тема урока: «Степенные функции, их свойства и графики»

Цели урока:

Образовательная:

Создать условия для формирования знаний о свойствах и особенностях графиков степенных функций $y = x^r$ при различных значениях r ;

Показать роль свойств степенной функции в процессе решения ряда математических задач, а, следовательно, и роль этой функции и ее свойств в процессе сдачи ЕГЭ.

Развивающие:

Способствовать развитию информационных умений учащихся: умения работать с текстом слайда, умения составлять опорный конспект;

Способствовать развитию творческой и мыслительной деятельности учащихся;

Продолжить формирование умений чётко и ясно излагать свои мысли, анализировать, делать выводы.

Воспитательные:

Продолжить развитие культуры математической речи;

Способствовать формированию коммуникативной компетентности.

Тип урока: урок обобщения и систематизации материала;

Формы организации учебной деятельности: фронтальная, групповая, индивидуальная.

Методы: объяснительно-иллюстративный, частично-поисковый.

Средства обучения:

- компьютер, медиапроектор;
- классная доска;
- слайдовая презентация (PowerPoint);
- учебник «Алгебра и начала анализа» (профильный уровень) под ред.

А.Г.Мордковича;

- рабочая тетрадь, чертёжные инструменты;
- опорный конспект темы (документ Word);

В результате изучения темы учащиеся должны

Знать: применение степенной функции, свойства степенной функции в зависимости от показателя.

Уметь: называть свойства степенной функции в зависимости от показателя, строить графики (эскизы графиков) степенных функций с рациональным показателем, четко и ясно излагать свои мысли, анализировать, делать выводы, применять свойства степенной функции при решении заданий ЕГЭ.

Ход урока

1. Организационный момент

2. Целеполагание и мотивация

Сообщаем тему и цель урока: «Степенные функции, их свойства и графики»

и цель урока: обобщить и систематизировать знания и умения по теме «Степенные функции, их свойства и графики»

Задачи урока:

1. видеть график степенной функции по формуле;
2. определять по графику функцию;
3. уметь анализировать график;
4. применять свойства степенной функции при решении заданий ЕГЭ
5. развивать навыки мыслительной деятельности, математической зоркости.

3. Актуализация опорных знаний (повторение):

1. Что называется функцией (Функция - это зависимость между двумя множествами, при котором каждому элементу из одного множества ставится в соответствии с некоторым правилом, законом единственный элемент из другого множества).

2. Что такое степенная функция? (Степенными функциями называются функции вида $y = x^r$, где r – заданное рациональное число).

3. Что такое r ? (Это показатель степени)

4. А что зависит от показателя степени? (свойства и график функции)

5. Повторим свойства и графики функций (Приложение 1)

Рассмотрим степенную функцию с четным натуральным показателем, графиком данной функции является?

Обратить внимание на то, что чем больше показатель степени, тем ближе оси параболы расположены к оси Oy .

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с нечетным натуральным показателем, графиком данной функции является? (кубическая парабола)

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с целым отрицательным нечетным показателем, графиком данной функции является? (гипербола)

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с целым отрицательным четным показателем, графиком данной функции является? (гипербола)

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с положительным дробным показателем, со значениями от 0 до 1 графиком данной функции является? (ветвь параболы или кривая похожая на ветвь параболы)

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с положительным дробным показателем, со значениями больше 1, графиком данной функции является? (ветвь параболы или кривая похожая на ветвь параболы)

Вспомним свойства этой функции

Рассмотрим степенную функцию с отрицательным дробным показателем, графиком данной функции является? (ветвь гиперболы или кривая похожая на ветвь гиперболы), вспомним свойства этой функции

6. А вот если показатель степени равен 1, что это за функция и что является ее графиком? (линейная, а ее график прямая, которая является биссектрисой 1 и 3 координатной четверти)

7. А если показатель равен 0? (получаем функцию $y = 1$, где x не равен 0)

8. Через какую точку проходит график любой степенной функции? (через точку (1;1))

4. Применение знаний и умений

Многие процессы происходящие в окружающей нас жизни, природе, технике описывают функциональную зависимость. Посмотрим, где в жизни встречаются графики и свойства степенной функции. (Слайды)

Рассмотрим ещё одну из жизненных ситуаций и решим задачу.

Задача 1 (раздать распечатанный текст)

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Соппротивлением воздуха пренебречь.

В какой науке находит применение данная задача? В физике

То есть мы ещё раз можем убедиться, как многогранно используется данная функция не только в математике, но и в других науках.

Учитель вызывает одного человека к доске.

На доске

Что дано в задаче?

Начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с, указано направление выстрела.

Дано:

$$v_0 = 400 \text{ м/с.}$$

Что нужно найти?

Наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения.

Найти h , t_1 , t_2 .

Записываем решение.

Решение.

Какой функцией выражается закон движения снаряда?

Квадратичной функцией

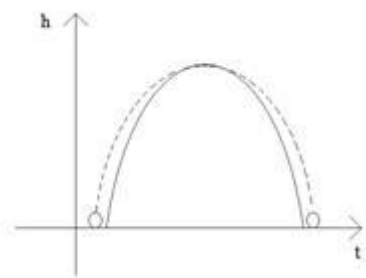
$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \text{ где } g - \text{ ускорение силы тяжести, } g = 9.8 \text{ м/с.}$$

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$g = 9.8 \text{ м/с.}$$

А что будет графиком данной функции?

Графиком данной функции является парабола.



наглядность

Куда будут направлены её ветви?

Ветви параболы направлены вниз.

Где, следовательно, будет наибольшая высота подъёма снаряда?

Наибольшая высота подъёма снаряда будет в вершине параболы.

Что необходимо знать для нахождения наибольшей высоты?

Необходимо найти координаты вершины параболы.

Что мы получим, подставив данные?

$$h = 400t - 4.9t^2$$

$$t = -\frac{b}{2a}; t = -\frac{400}{-9.8} \approx 41(\text{с})$$

$$h = 400 * 41 - 4.9 * 41^2 \approx 8163 \text{ м} \approx 8,16 \text{ км}$$

Как найти время падения снаряда?

Время подъёма снаряда соответствует интервалу возрастания функции и равно 41с.

Время падения снаряды соответствует интервалу убывания функции и равно времени

подъёма, так как график функции симметричен относительно прямой, проходящей через вершину параболы.

Каков ответ?

Ответ: $h = 8.16$ км; $t_1 = t_2 \approx 41$ с.

Итак, мы ещё раз убедились, что свойства степенной функции играют немаловажную роль в решении таких интересных жизненных задач.

Фрагмент исследования широко применяется в заданиях ЕГЭ, и чтобы их выполнить, необходимо знать свойства степенной функции.

В каких заданиях ЕГЭ нам понадобятся знания о степенной функции и её свойствах? (базовый уровень: 2, 5 и 7; профильный уровень: 5, 9, 10, 12, 13)

Рассмотрим задание 12 ЕГЭ. (СЛАЙД)

Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$.

Решение.

Что используется для выполнения данного задания? (формула производной степенной функции)

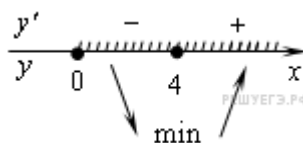
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \sqrt{x} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = 4$.

Ответ: 4.

Напоминаю о том, что опираясь на свойства степенных функций можно решать уравнения, неравенства, выполнять тождественные преобразования выражений.

Задание 9 (профиль) и 5 (база) ЕГЭ (СЛАЙД)

Найдите значение выражения $\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$ при $a = 12$.

Решение.

Выполним преобразования:

$$\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}} = a^{3,21+7,36-8,57} = a^2 = 144.$$

Ответ: 144.

5. Проверка уровня усвоения знаний и умений

Самостоятельная работа по карточкам.

4 учащихся - базовый уровень и

2 учащихся - профильный уровень.

(Приложение 2).

Ответы (СЛАЙД)

По окончании работы подводим итог, оцениваем работу учащихся

6. Постановка домашнего задания дифференцированно по карточкам

(Приложение 3)

7. Рефлексивно- оценочный: Подводим итог урока (чем же вы сегодня занимались на уроке?), сравниваем с поставленными целями (вернуться к целям), оцениваем деятельность класса (как вы сегодня работали?) и отдельных учащихся, выделяет удавшиеся моменты (что понравилось больше всего?), выясняем, что вызвало наибольшую трудность. И закончить урок мне хочется стихотворением:

Дружить наукам можно вечно,

Вселенная ведь бесконечна.

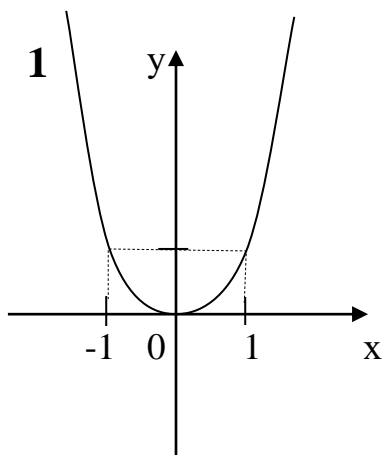
Спасибо всем вам за урок,

А главное, чтоб он был впрок!

Но в конце урока Вы сами можете оценить себя, свою работу на уроке, как Вы думаете какую оценку можете себе поставить.

Приложение 1. **Степенная функция $y = x^r$**
опорный конспект для учащихся

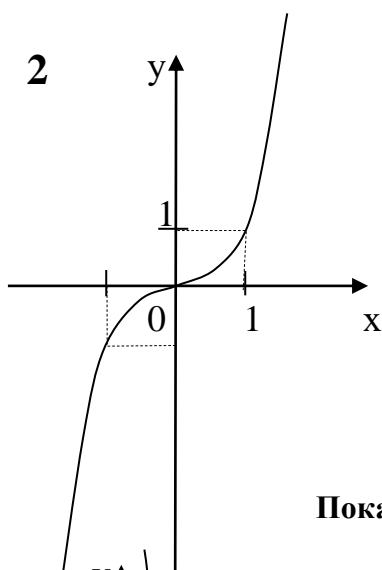
Показатель $r = 2n$ четное натуральное число



Примеры функций _____

Свойства -----

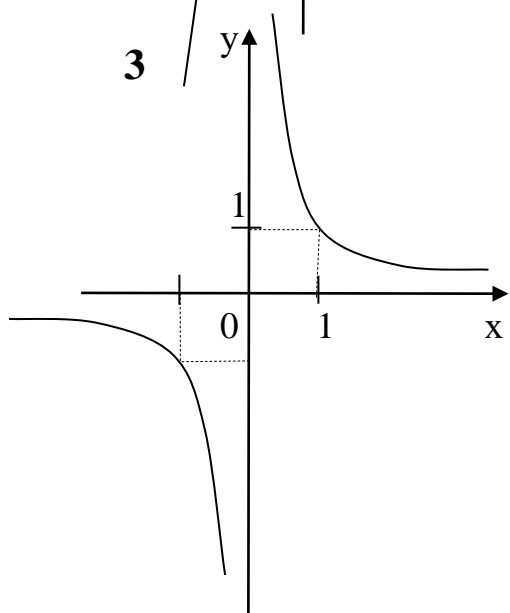
Показатель $r = 2n-1$ нечетное натуральное число



Примеры функций _____

Свойства -----

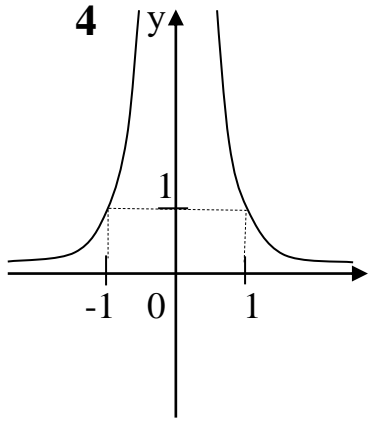
Показатель $r = -(2n-1)$, где n – натуральное число



Примеры функций _____

Свойства -----

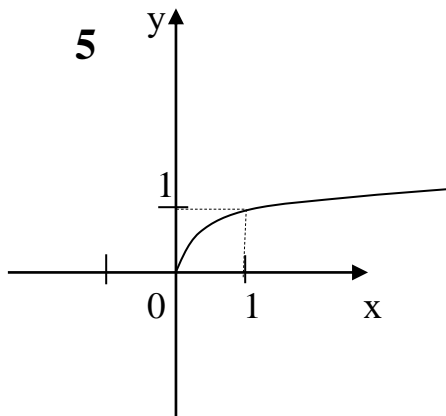
Показатель $r = -2n$, где n – натуральное число



Примеры функций _____

Свойства -----

Показатель r – дробное положительное число

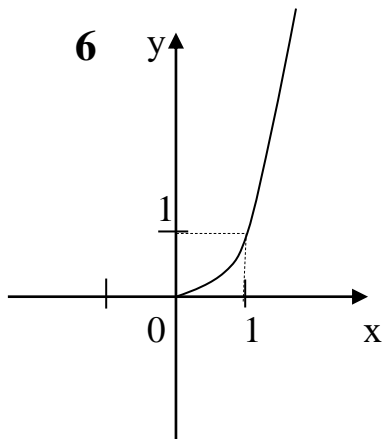


$$0 < r < 1$$

Примеры функций _____

Свойства -----

$$r > 1$$

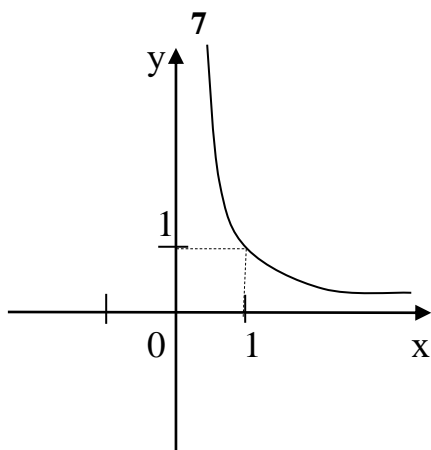


Примеры функций _____

Свойства -----

Показатель r – отрицательное дробное число

$$r < 0$$



Примеры функций _____

Свойства -----

Карточка "Самостоятельная работа" (базовый уровень)

1. Найдите значение выражения $\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$.
2. Найдите значение выражения $4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-1}$.
3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = -2$.
4. Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.
5. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	0-2	3	4	5

Карточка "Самостоятельная работа" (базовый уровень)

1. Найдите значение выражения $\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$.
2. Найдите значение выражения $4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-1}$.
3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = -2$.
4. Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.
5. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	0-2	3	4	5

Карточка "Самостоятельная работа" (базовый уровень)

$$\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$$

1. Найдите значение выражения $\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$.
2. Найдите значение выражения $4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-1}$.
3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = -2$.
4. Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.
5. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	0-2	3	4	5

Карточка "Самостоятельная работа" (базовый уровень)

$$\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$$

1. Найдите значение выражения $\frac{4^{3,5} \cdot 5^{2,5}}{20^{1,5}}$.
2. Найдите значение выражения $4 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-1}$.
3. Решите уравнение: $\sqrt[3]{x+2} = -2$.
4. Решите уравнение $x^2 + 9 = (x+9)^2$.
5. Найдите значение выражения $\frac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	0-2	3	4	5

Карточка "Самостоятельная работа" (профильный уровень)

1. Найдите значение выражения $6x \cdot (3x^{12})^3 : (3x^9)^4$ при $x = 75$.

2. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

4. а) Решите уравнение $(\text{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	1	2	3	4

Карточка "Самостоятельная работа" (профильный уровень)

1. Найдите значение выражения $6x \cdot (3x^{12})^3 : (3x^9)^4$ при $x = 75$.

2. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000$ кг/м³ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8$ Н/кг). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н? Ответ выразите в метрах.

3. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

4. а) Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{13 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Критерии оценивания:

Оценка	"2"	"3"	"4"	"5"
Балл	1	2	3	4

Ответы:

Карточка "Самостоятельная работа" (базовый уровень)

1. 80
2. 0,584
3. - 10
4. - 4
5. 13,5

Карточка "Самостоятельная работа" (профильный уровень)

1. 150
2. 2
3. 10
4. а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{7\pi}{4}$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)
2. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = 8$.
3. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.
4. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)
2. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = 8$.
3. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.
4. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)
2. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = 8$.
3. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.
4. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)
2. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = 8$.
3. Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.
4. Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)

2. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведра сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления,

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$$

выраженная в ньютонах, равна $m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v скорость движения ведра в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

3. Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

4. а) Решите уравнение $(2 \cos^2 x + \sin x - 2) \sqrt{5 \operatorname{tg} x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Карточка "Домашняя работа"

1. Учебник: повторять теорию § 8-10, № 9.34-9.36 (в), 9.47 (а)

2. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведра сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления,

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$$

выраженная в ньютонах, равна $m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m – масса воды в килограммах, v скорость движения ведра в м/с, L – длина веревки в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

3. Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

4. а) Решите уравнение $(2 \cos^2 x + \sin x - 2) \sqrt{5 \operatorname{tg} x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Задача 10

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.

На учебном полигоне произведён выстрел из зенитного орудия в вертикальном направлении. Требуется определить наибольшую высоту подъёма снаряда, время подъёма и время падения, если начальная скорость снаряда $v_0 = 400$ м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь.